Funções Inversas

Corpo Docente:

Ana Breda (Responsável)
Paolo Vettori
Sandrina Santos

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Setembro de 2016

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no texto de **Virgínia Santos** indicado na bibliografia

Def. 1.1

Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se função real de variável real.
A D_f chamamos **domínio** de f. Quando a ação de f é descrita por uma expressão numérica, D_f é um subconjunto do conjunto D constituído pelos números reais para os quais essa expressão tem significado.

Obs. 1.2

Sempre que a ação de f seja descrita por expressões numéricas, e nada for referido em contrário, toma-se para domínio de f o conjunto D.

Def. 1.3

O **contradomínio** de uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o conjunto CD_f constituído pelos valores que f assume, isto é,
$CD_f = \{f(x) : \ x \in D_f\} = \{y \in \mathbb{R} : \ y = f(x) \ \wedge \ x \in D_f\}$.

Exer. 1.4

Determine o domínio e o contradomínio da função (f definida analiticamente por)
$f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$.

Def. 1.5

Uma função $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função **injetiva** se, para todo o $x_1, x_2 \in D_f$,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou de forma equivalente se, para todo o $x_1, x_2 \in D_f$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Exer. 1.6

Verifique se as funções $f(x) = 3x - \pi$ e $g(x) = x^2 + 4$ são injetivas.

Def. 1.7

Seja $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função **injetiva**. A função

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}\colon & CD_f & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & x \end{array}$$

onde x é tal que $f(x) = y$, é designada por **função inversa** de f.

Dizemos que uma função é **invertível** se admite inversa.

Obs. 1.8

- O contradomínio de f^{-1} é D_f (isto é, $CD_{f^{-1}} = D_f$);
- Se f é invertível, f^{-1} é invertível e $(f^{-1})^{-1} = f$;
- $\forall x \in D_f, \quad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$;
- $\forall y \in CD_f, \quad \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f(f^{-1}(y)) = y$;
- $\forall x \in D_f,\ \forall y \in CD_f, \quad f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$;
- Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à reta $y = x$.

Exer. 1.9

Caracterize a inversa das funções $f(x) = 3x - \pi$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$.

Prop. 1.10

Se $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente monótona em D_f, então f é injetiva.

Prop. 1.11

Se $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **estritamente** crescente/decrescente em D_f, então f^{-1} é **estritamente** crescente/decrescente em CD_f.

Prop. 1.12

Seja f uma função contínua e **estritamente** crescente/decrescente num intervalo $[a, b]$. Sejam $c = f(a)$ e $d = f(b)$, então

(i) f^{-1} é **estritamente** crescente em $[c, d]$/ decrescente em $[d, c]$;

(ii) f^{-1} é contínua.

Def. 1.13

Função exponencial de base a:
$(a > 0 \;\text{ e }\; a \neq 1)$

$$\begin{array}{rcccc} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & a^x \end{array}$$

Def. 1.14

g é estrit. crescente se $a > 1$ e estrit. decrescente se $a < 1$.

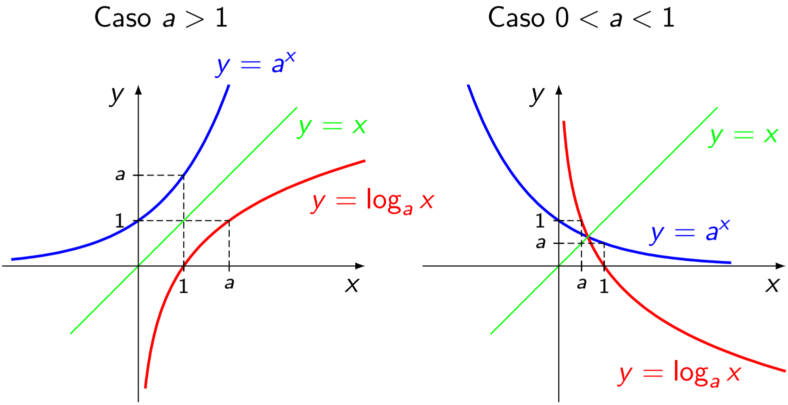
Portanto g é invertível nos dois casos. A inversa de g é a função,

$$\begin{array}{rcccc} g^{-1} & : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = \log_a x \end{array}$$

onde $y = \log_a x$ sse $a^y = x$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Obs. 1.15

$\log_a x$ lê-se logaritmo de x na base a. No caso de $a = e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\log_e x$ lê-se **logaritmo natural** de x ou logaritmo neperiano de x.


Caso $a > 1$
$y = a^x$
y
$y = x$
a
$y = \log_a x$
1
1
a
x
Caso $0 < a < 1$
y
$y = x$
1
$y = a^x$
a
a
1
x
$y = \log_a x$

Prop. 1.16

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$ $\quad a^x a^y = a^{x+y}$
2. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y;$ $\quad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x;$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Exer. 1.17

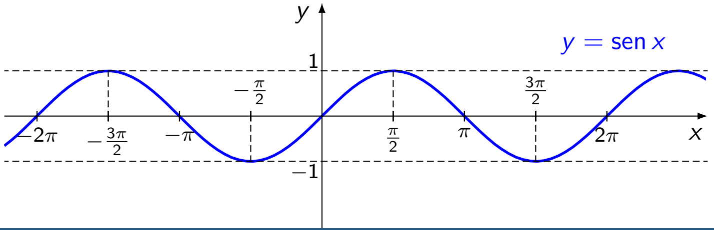
Caracterize a inversa das funções:

(a) $f(x) = e^{1-2x}$ (b) $f(x) = \frac{5\ln(x-3)-1}{4}$

(c) $f(x) = \log_3(2-x)$ (d) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

Def. 1.18

Função seno: $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \operatorname{sen} x$



Prop. 1.19

Propriedades da função seno:

- **Domínio**: $\mathbb{R}$; **Contradomínio**: $[-1, 1]$;
- **Função periódica** de período 2π, isto é, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$;
- **Função ímpar** ($\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$);
- **Não é injetiva**, mas a sua restrição ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ já é injetiva.

Def. 1.20

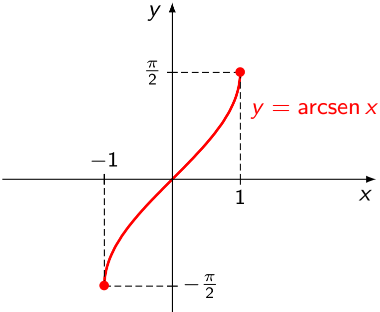
A restrição principal da função seno é a função injetiva

$$\begin{aligned} f :\ [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

A inversa de f é chamada de função arco seno, denota-se por arcsen, e define-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsen}\ :\ [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \operatorname{arcsen} x \end{aligned}$$

onde, $y = \operatorname{arcsen} x$ sse $\operatorname{sen} y = x$, $\forall x \in [-1, 1]$, $\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Sempre que houver necessidade de fazer uso de inversas de funções trigonométricas está implicitamente assente que o domínio tomado é o das suas restrições principais.

Exer. 1.21

Caracterize a inversa das funções definidas por:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

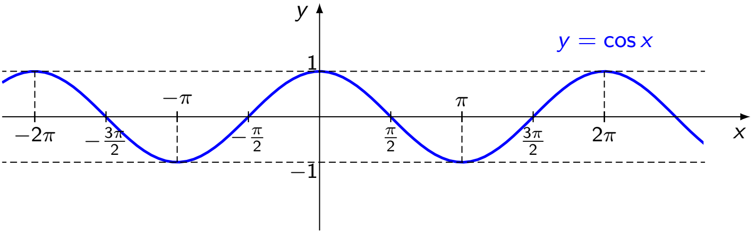
(b) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2 \operatorname{arcsen}(1-x)}{3}$

(c) $f(x) = 2 \operatorname{arcsen}(\sqrt{x}) - \pi$

Def. 1.22

Função cosseno:

$$\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$



Prop. 1.23

Propriedades da função cosseno:

- **Domínio**: $\mathbb{R}$; **Contradomínio**: $[-1, 1]$;
- **Função periódica** de período 2π, isto é, $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$;
- **Função par** $(\cos(-x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R})$;
- **Não é injetiva**. No entanto, a sua restrição ao intervalo $[0, \pi]$ já é injetiva.

Def. 1.24

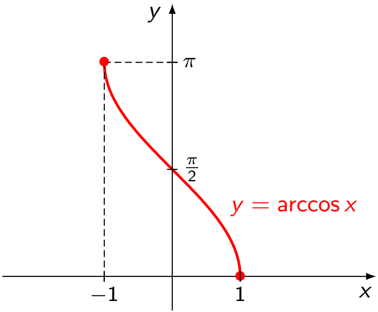
A restrição principal da função cosseno é a função injetiva

$$\begin{array}{rcccc} f & : & [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

A inversa de f é chamada de função arco cosseno, denota-se por arccos e define-se do seguinte modo:

$$\begin{array}{rcccc} \arccos & : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = \arccos x \end{array}$$

onde $y = \arccos x$ sse $\cos y = x, \ \forall x \in [-1,1], \ \forall y \in [0,\pi]$.



Exer. 1.25

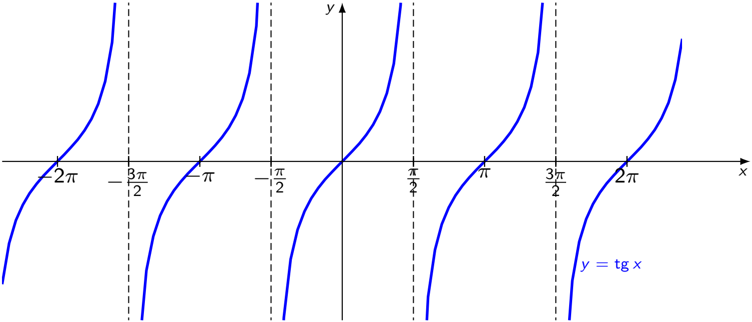
Caracterize a inversa das funções definidas por:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2 + \cos x}$

(b) $f(x) = 2\pi - \arccos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Def. 1.26

Função tangente: $\begin{array}{rccl} \mathrm{tg} : & D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{tg}\, x = \dfrac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x} \end{array}$



Prop. 1.27

Propriedades da função tangente:

- **Domínio**: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$; **Contradomínio**: $\mathbb{R}$;
- **Função periódica** de período π, isto é, $\mathrm{tg}\ x = \mathrm{tg}(x + k\pi)$, $\forall x \in D$ e $k \in \mathbb{Z}$;
- **Função ímpar** $(\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}(x)$, $\forall x \in D$;
- **Não é injetiva**. No entanto, a sua restrição ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ já é injetiva.

Def. 1.28

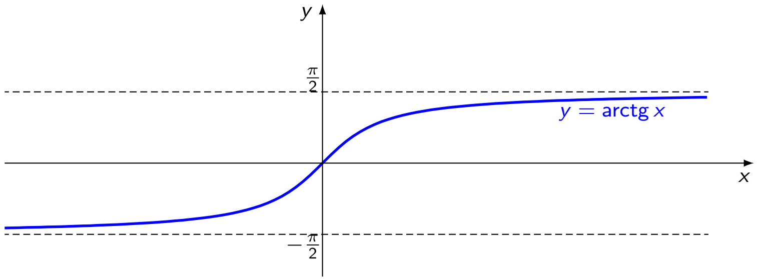
A restrição principal da função tangente é a função injetiva

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \operatorname{tg} x \end{array}$$

A inversa de f é chamada de função arco tangente, denota-se por arctg e define-se do seguinte modo:

$$\begin{array}{rcccc} \operatorname{arctg} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = \operatorname{arctg} x \end{array}$$

onde $y = \operatorname{arctg} x \quad \text{sse} \quad \operatorname{tg} y = x, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.



Exer. 1.29

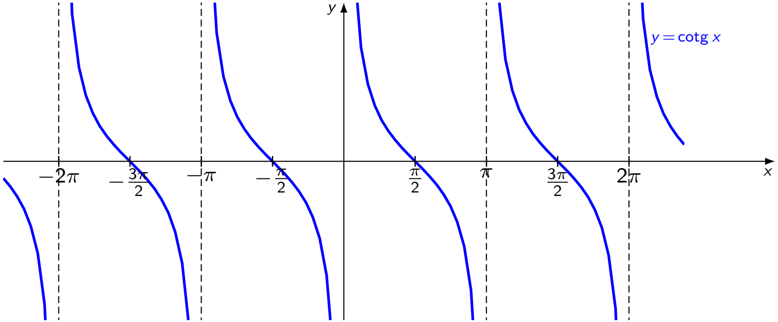
Caracterize a inversa das funções definidas por:

(a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2-x}\right)$

(b) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(1-x)$

Def. 1.30

Função cotangente: $\begin{array}{rcl} \text{cotg} : D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} \end{array}$



Prop. 1.31

Propriedades da função cotangente:

- **Domínio**: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$; **Contradomínio**: $\mathbb{R}$;
- **Função periódica** de período π, isto é,cotg $x = \text{cotg}(x + k\pi)$, $\forall x \in D$ e $k \in \mathbb{Z}$;
- **Função ímpar** ($\text{cotg}(-x) = -\text{cotg}(x)$, $\forall x \in D$);
- **Não é injetiva**. No entanto, a sua restrição ao intervalo $]0, \pi[$ já é injetiva.

Def. 1.32

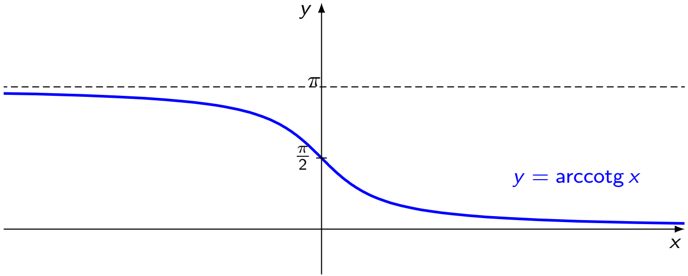
A restrição principal da função cotangente é a função injetiva

$$\begin{array}{rcccl} f & : &]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \operatorname{cotg} x \end{array}$$

A inversa de f é chamada de função arco cotangente, denota-se por arccotg e define-se do seguinte modo:

$$\begin{array}{rcccl} \operatorname{arccotg} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = \operatorname{arccotg} x \end{array}$$

onde $y = \operatorname{arccotg} x$ sse $\operatorname{cotg} y = x, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in]0,\pi[$.



Exer. 1.33

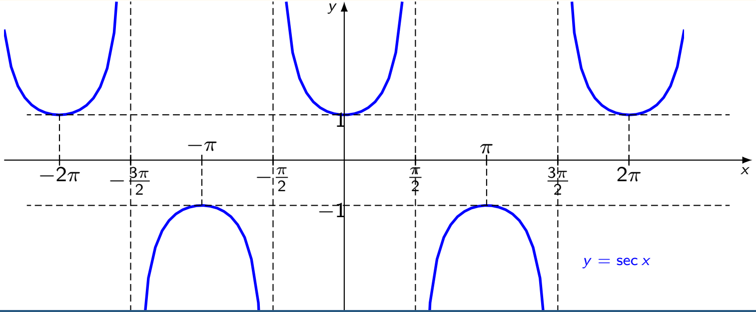
Caracterize a inversa das funções definidas por:

(a) $f(x) = 2\,\mathrm{cotg}\left(\frac{x}{3}\right)$

(b) $f(x) = \pi + \mathrm{arccotg}\left(\frac{x-1}{2}\right)$

Def. 1.34

Função secante:
$$\begin{array}{rcl} \sec : D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \end{array}$$



Prop. 1.35

Propriedades da função secante:

- **Domínio**: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$; **Contrad.**: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$;
- **Função periódica** de período 2π, isto é, $\sec x = \sec(x + 2k\pi),\ \forall x \in D$ e $k \in \mathbb{Z}$;
- **Função par** $(\sec(-x) = \sec(x), \forall x \in D$;
- **Não é injetiva**. Contudo, a sua restrição ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ é injetiva.

Def. 1.36

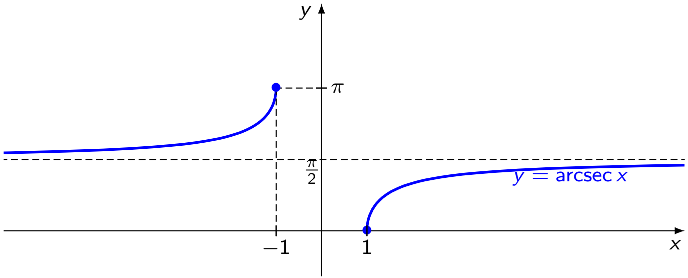
A restrição principal da função secante é a função injetiva

$$f \; : \; \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\tfrac{\pi}{2}, \pi\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sec x$$

A inversa de f é chamada de função arco secante, denota-se por arcsec e define-se do seguinte modo:

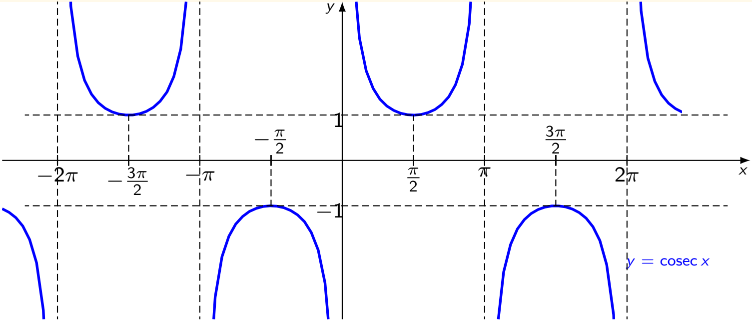
$$\text{arcsec} \; : \;]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \text{arcsec}\, x$$

onde, $\forall x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \forall y \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $y = \text{arcsec}\, x$ sse $\sec y = x$.



Def. 1.37

Função cossecante: $\begin{array}{rcl} \text{cosec} : D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{cosec}\, x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x} \end{array}$



Prop. 1.38

Propriedades da função cossecante:

- **Domínio**: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$; **Contradomínio**: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$;
- **Função periódica** de período 2π ($\text{cosec}\, x = \text{cosec}(x + 2k\pi),\ \forall x \in D$ e $k \in \mathbb{Z}$);
- **Função ímpar** ($\text{cosec}(-x) = \cos(x)$);
- **Não é injetiva**.Contudo, a sua restrição ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ é injetiva.

Def. 1.39

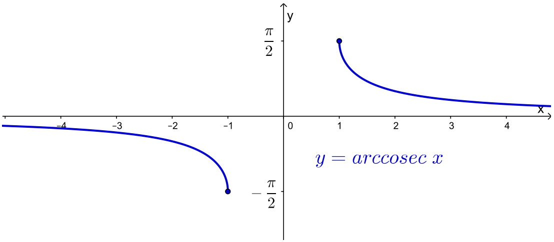
A restrição principal da função cossecante é a função injetiva

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \left[-\frac{\pi}{2}, o\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{cosec} x \end{array}$$

A inversa de f é chamada de função arco cossecante, denota-se por arccosec e define-se do seguinte modo:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{arccosec} \ : \ ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \operatorname{arccosec} x \end{array}$$

onde, $\forall x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \forall y \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $y = \operatorname{arccosec} x$ sse $\operatorname{cosec} y = x$.



Obs. 1.40

Função	Domínio	Contradomínio
$\operatorname{arcsen} x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
$\operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$	$]0,\pi[$
$\operatorname{arcsec} x$	$]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$	$[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\operatorname{arccosec} x$	$]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

Prop. 1.41

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\operatorname{cosec}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$, para $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
3. $\sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
4. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
5. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
6. $\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$
7. $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
8. $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
9. $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
10. $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
11. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

Fórmulas envolvendo inversas de funções trigonométricas

Prop. 1.42

1. $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{(1 - x^2)} = \cos(\arcsin(x))$;
2. $\operatorname{arccotg}(x) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$;
3. $\operatorname{arcsec}(x) = \arccos(\frac{1}{x})$;
4. $\operatorname{arccosec}(x) = \arcsin(\frac{1}{x})$.
5. $\sec(\operatorname{arctg}(x)) = \sqrt{(1 + x^2)}$.

Teo. 1.43

Teorema da derivada da função composta - Regra da cadeia

Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $g \circ f$ está definida. Se f é diferenciável em a, i.e. a derivada em $a \in D_f$ existe e é finita, e g é diferenciável em $f(a)$ então $g \circ f$ é diferenciável em a e

$$(g \circ f)'(a) = (g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Exer. 1.44

Considere as funções reais de variável real f e g definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \text{sen}(x)$. Determine usando a regra da cadeia as derivadas seguintes:

1. $(g \circ f)'(x)$ para $x \in \mathbb{R}$;
2. $(f \circ g)'(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Teo. 1.45

Teorema da derivada da função inversa

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua e f^{-1} a função inversa de f. Se f é diferenciável em $x_0 \in]a, b[$ e $f'(x_0) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Exer. 1.46

1. Sendo $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ contínua e estritamente crescente tal que $f(2) = 7$ e $f'(2) = \frac{2}{3}$, calcule, caso exista, $(f^{-1})'(7)$.
2. Sabendo que $f(x) = 4x^3 + x + 2$ é invertível, calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$.
3. Seja $f(x) = x^3$. Determine a derivada de f^{-1} utilizando o teorema da função inversa.

Exer. 1.47

Utilizando o teorema da derivada da função inversa mostre que:

1. $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad \forall x \in]-1,1[$

2. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad \forall x \in]-1,1[$

3. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Obs. 1.48

Seja u uma função de x.

- $(\text{sen}\, u)' = u' \cos u$
- $(\cos u)' = -u' \,\text{sen}\, u$
- $(\text{tg}\, u)' = u' \sec^2 u$
- $(\text{cotg}\, u)' = -u' \,\text{cosec}^2\, u$
- $(\sec u)' = u' \,\text{tg}\, u \sec u$
- $(\text{cosec}\, u)' = -u' \,\text{cotg}\, u \,\text{cosec}\, u$
- $(\text{arcsen}\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $(\text{arctg}\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
- $(\text{arccotg}\, u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

Exer. 1.49

1. Seja $f(x) = \ln(\operatorname{arcsen} x)$, com $x \in]0, 1[$.
   Calcule $\left(f^{-1}\right)'$ utilizando o teorema da função inversa.
2. Calcule a derivada das seguintes funções:
   (a) $f(x) = \left(1 + x^2\right) \operatorname{arctg} x$
   (b) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$
   (c) $f(x) = \operatorname{arccotg}\left(\operatorname{sen}\left(4x^3\right)\right)$
   (d) $f(x) = \sqrt[3]{\arccos x}$
3. Considere a função $f(x) = \operatorname{arcsen}(1 - x) + \sqrt{2x - x^2}$.
   (a) Determine o domínio de f.
   (b) Mostre que $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{2x - x^2}}$

1.4. $D_f = [-1, +\infty[$ e $CD_f =]-\infty, 3]$.

1.9. $D_{f^{-1}} = CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \frac{y+\pi}{3}$

$D_{g^{-1}} = [1, +\infty[$ e $CD_{g^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$, $g^{-1}(y) = 1 + y^2$

1.17.
(a) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$, $CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \frac{1-\ln y}{2}$

(b) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $CD_{f^{-1}} =]3, +\infty[$, $f^{-1}(y) = 3 + e^{\frac{4y+1}{5}}$

(c) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $CD_{f^{-1}} =]-\infty, 2[$, $f^{-1}(y) = 2 - 3^y$

(d) $D_{f^{-1}} =]0, 1[$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$

1.21.
(a) $D_{f^{-1}} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $CD_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$, $f^{-1}(y) = \text{arcsen}(2y) - \frac{\pi}{2}$

(b) $D_{f^{-1}} = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, $CD_{f^{-1}} = [0, 2]$, $f^{-1}(y) = 1 - \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3y}{2}\right)$

(c) $D_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$, $CD_{f^{-1}} = [0, 1]$, $f^{-1}(y) = \text{sen}^2\left(\frac{y+\pi}{2}\right)$

1.25.
(a) $D_{f^{-1}} = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, $CD_{f^{-1}} = [0, \pi]$, $f^{-1}(y) = \arccos\left(\frac{1}{y} - 2\right)$

(b) $D_{f^{-1}} = [\pi, 2\pi]$, $CD_{f^{-1}} = [-2, 2]$, $f^{-1}(y) = 2\cos y$

1.29.
(a) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $CD_{f^{-1}} =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$, $f^{-1}(y) = 2 - \frac{\pi}{\text{arctg}\, y}$

(b) $D_{f^{-1}} =]0, \pi[$, $CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = 1 - \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

1.33.
(a) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $CD_{f^{-1}} =]0, 3\pi[$, $f^{-1}(y) = 3\,\text{arccotg}\left(\frac{y}{2}\right)$

(b) $D_{f^{-1}} =]\pi, 2\pi[$, $CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = 2\,\text{cotg}(y - \pi) + 1$

1.44.

(a) $(g \circ f)'(x) = 3x^2 \cos(x^3)$ (b) $(f \circ g)'(x) = 3 \sin^2(x) \cos(x)$

1.46.

1. $\frac{3}{2}$ 2. 1 3. $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$

1.49.

1. $\left(f^{-1}\right)'(y) = e^y \cos(e^y)$

2. (a) $2x \operatorname{arctg} x + 1$ (b) $-\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$ (c) $-\frac{12x^2 \cos(4x^3)}{1+\operatorname{sen}^2(4x^3)}$ (d) $-\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}\sqrt[3]{\arccos^2 x}}$

3. (a) $[0, 2]$

Teoremas de Bolzano, Weierstrass, Rolle, Lagrange e Cauchy.

Corpo Docente:

Ana Breda (Responsável)
Paolo Vettori
Sandrina Santos

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
Setembro de 2016

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no texto de **Virgínia Santos** indicado na bibliografia

Teorema de Bolzano ou dos Valores Intermédios - Relembrar

Teo. 2.1

Seja f uma função **contínua em** $[a, b]$. Se $f(a) \neq f(b)$ então, para todo o y entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = y$

Cor. 2.2

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ com $f(a) \neq f(b)$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ então existe existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Exer. 2.3

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ cujos únicos zeros são $x = a$ e $x = b$. Mostre que f tem sinal constante em $[a, b]$.

Def. 2.4

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

- a é um maximizante local de f e $f(a)$ diz-se um máximo local de f se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(a) \geq f(x), \quad \forall x \in]a-\delta, a+\delta[\cap D_f.$$

- a é um minimizante local de f e $f(a)$ diz-se um mínimo local de f se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in]a-\delta, a+\delta[\cap D_f.$$

- Aos máximos e mínimos locais chamamos extremos locais.
- Aos maximizantes e minimizantes locais chamamos extremantes locais.

Def. 2.5

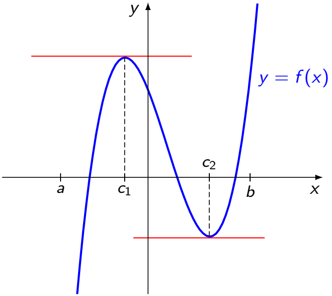
Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

- a é um maximizante global de f e $f(a)$ diz-se um máximo global de f se $f(a) \geq f(x), \quad \forall x \in D_f$.
- a é um minimizante global de f e $f(a)$ diz-se um mínimo global de f se $f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in D_f$.
- Aos máximos e mínimos globais chamamos extremos globais.
- Aos maximizantes e minimizantes globais chamamos extremantes globais.

Prop. 2.6

Seja $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $c \in]a, b[$. Se c é um extremante local de f, então $f'(c) = 0$.

Ilustração gráfica



Obs. 2.7

1. **O recíproco** da proposição do slide anterior **não é verdadeiro**. De facto, existem funções com derivada nula em determinado ponto e esse ponto não é extremante. Por exemplo, $f(x) = x^3$, no ponto $x = 0$.

2. Pode ainda acontecer que a derivada de f não exista num dado ponto x_0, mas x_0 ser extremante. São exemplos:
   - $f(x) = |x|$, no ponto $x_0 = 0$ e
   - $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$, no ponto $x_0 = 0$.

Def. 2.8

Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $c \in \operatorname{int}(D_f)$. Se $f'(c) = 0$ dizemos que c é ponto crítico de f.

Teorema de Weierstrass ou Teorema dos valores mínimo e máximo

Teo. 2.9

Se f é uma função **contínua em** $[a, b]$ então f **atinge** em $[a, b]$ **o máximo e o mínimo globais** (isto é, existem $x_1; x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x2)$ para todo o $x \in [a, b]$).

Exer. 2.10

Considere a função real de variável real f definida por,

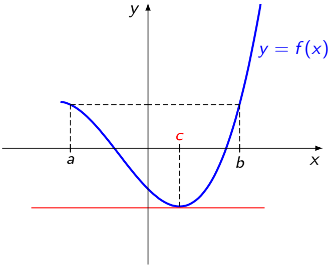
$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \frac{e^{x-1}-1}{x} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Mostre que a restrição de f ao intervalo $[-3, 10]$ atinge nesse intervalo um máximo e um mínimo.

Teo. 2.11

Seja f uma função **contínua em** $[a, b]$ e **diferenciável em** $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$

Ilustração Gráfica



Cor. 2.12

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.

(i) Entre dois zeros de f existe pelo menos um zero de f'.

(ii) Entre dois zeros consecutivos de f' existe, no máximo, um zero de f.

Exer. 2.13

1. Seja f a f.r.v.r. definida por $f(x) = \operatorname{arctg}\left((x-1)^2\right) + 2$.

   Usando o Teorema de Rolle, mostre que existe $c \in]0, 2[$ tal que $f'(c) = 0$.

2. Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

3. Mostre que a função definida por $f(x) = \operatorname{sen} x + x$ tem um único zero no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Teo. 2.14

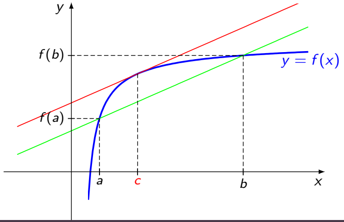
Seja f uma função **contínua em** $[a, b]$ e **diferenciável em** $]a, b[$. Então, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ .$$

O Teorema de Lagrange generaliza o Teorema de Rolle.

Para a demonstração basta considerar a função $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.

Ilustração Gráfica



Obs. 2.15

Satisfeitas as condições do Teorema de Lagrange pode garantir-se a existência de $c \in]a, b[$ tal que **a tangente ao gráfico** de f em $C = (c, f(c))$ é **paralela** à reta que passa pelos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.

Relembrar que o declive m_c da **reta tangente ao gráfico de** $C = (c, f(c))$ é dada por $m_c = f'(c)$ e por conseguinte uma equação dessa reta é $y - f(c) = f'(c)(x - c)$.

Exer. 2.16

1 Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

(a) Estude f quanto à continuidade em $x = 0$.

(b) Mostre que existe pelo menos um $c \in \left]-\frac{2}{\pi}, 0\right[$ tal que $f'(c) = \frac{2}{\pi}$.

2 Seja $f(x) = \operatorname{arcsen}(\ln x)$.

(a) Determine o domínio de f.

(b) Mostre que existe pelo menos um $c \in]1, e[$ tal que $f'(c) = \frac{\pi}{2(e-1)}$.

3 Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $h'(x) = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen}^2 x}$ e $h(0) = 0$. Usando o Teorema de Lagrange, mostre que $h(x) \leq e \cdot x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

Prop. 2.17

Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I e diferenciável em $\text{int}(I)$.

(i) Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é constante em I.

(ii) Se $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é crescente em I.

(iii) Se $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é decrescente em I.

(iv) Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é estritamente crescente em I.

(v) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é estritamente decrescente em I.

Obs. 2.18

$\text{int}([a,b]) = \text{int}(]a,b]) = \text{int}([a,b[) = \text{int}]a,b[=]a,b[$; $\text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
$\text{int}(]-\infty,a]) = \text{int}(]-\infty,a[) =]-\infty,a[$; $\text{int}([a,+\infty[) = \text{int}(]a,+\infty[) =]a,+\infty[$.

Prop. 2.19

Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b] \subseteq D_f$ e diferenciável em $]a, b[$, exceto possivelmente em $c \in]a, b[$.

(i) Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in]c - \delta, c[$, e $f'(x) < 0$, $\forall x \in]c, c + \delta[$, $\delta > 0$, então $f(c)$ é um máximo local de f

(ii) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in]c - \delta, c[$ e $f'(x) > 0$, $\forall x \in]c, c + \delta[$, $\delta > 0$, então $f(c)$ é um mínimo local de f.

Prop. 2.20

Seja c um ponto crítico de f num intervalo $]a , b[$. Admitamos que f é contínua em $]a, b[$ e f'' existe e é finita em todo o ponto de $]a, b[$. Então verificam-se as condições seguintes:

(i) se $f''(c) < 0$, então f admite em c um máximo local.

(ii) se $f''(c) > 0$, então f admite em c um mínimo local.

Exer. 2.21

1. Mostre que $g(x) = x + 2\,\mathrm{sen}\,x - 1$ tem um único zero no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$.
2. Mostre que $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.
3. Mostre que o polinómio $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ tem uma única raiz no intervalo $]-2, 1[$.

Teo. 2.22

Sejam f e g duas **funções contínuas** em $[a, b]$ **e diferenciáveis** em $]a, b[$. Se $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a, b[$, então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \,.$$

Obs. 2.23

Do Teorema de Cauchy pode estabelecer-se uma regra — **Regra de Cauchy** — de grande utilidade no cálculo de limites quando ocorrem **indeterminações do tipo** $\frac{\infty}{\infty}$ **ou** $\frac{0}{0}$.

Nos cinco slides seguintes enunciam-se as várias formas dessa regra.

Prop. 2.24

VERSÃO 1: Sejam f e g **funções diferenciáveis** em $I =]a, b[$ tais que, $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$.

Se $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} g(x)$ são **ambos nulos ou ambos infinitos**

e **existe o limite** $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ então

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Prop. 2.25

VERSÃO 2: Sejam f e g **funções diferenciáveis** em $I =]a, b[$ tais que, $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$.

Se $\lim_{x \to b^-} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} g(x)$ são **ambos nulos** ou **ambos infinitos**

e **existe o limite** $\lim_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ então

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Regra de Cauchy (versão 3)

Prop. 2.26

VERSÃO 3: Sejam $I =]a, b[$ e $c \in I$. Sejam f e g funções definidas em I e **diferenciáveis** em $I \setminus \{c\}$, tais que $g(x) \neq 0, \ \forall x \in I \setminus \{c\}$.

Se $g'(x) \neq 0, \ \forall x \in I \setminus \{c\}$, $\lim_{x \to c} f(x)$ e $\lim_{x \to c} g(x)$ são **ambos nulos** ou **ambos infinitos** e **existe o limite** $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Prop. 2.27

VERSÃO 4: Sejam f e g funções definidas em $I =]a, +\infty[$ e diferenciáveis em I, com $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ são ambos nulos ou ambos infinitos e existe $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, então,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Prop. 2.28

VERSÃO 5: Sejam f e g funções definidas em $I =]-\infty, b[$ e diferenciáveis em I, com $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ são ambos nulos ou ambos infinitos e existe $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, então,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Exer. 2.29

1. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \operatorname{arcsen} x}{3x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\ln(2-x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 \ln(-x)$

(f) $\lim\limits_{x\to -\infty} x e^{\frac{1}{x}}$

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+3)^{\frac{1}{x^2}}$

(h) $\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x)^{\ln x}$

2. Mostre que existe

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x},$$

mas não pode aplicar-se para o seu cálculo a regra de Cauchy.

Integrais indefinidos

Corpo Docente:

Ana Breda (Responsável)
Paolo Vettori
Sandrina Santos

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Setembro de 2016

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no texto de **Virgínia Santos** indicado na bibliografia

Def. 3.1

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, onde I é um intervalo não degenerado (isto é, com mais do que um ponto) de $\mathbb{R}$. Uma primitiva ou antiderivada de f **é uma qualquer função** F diferenciável em I **tal que, para todo o** $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

Se f admite uma primitiva em I dizemos que f é primitivável em I.

Obs. 3.2

- Caso $I = [a, b]$, dizer que F é diferenciável em I significa que, para todo o $x \in]a, b[$, F é diferenciável em x e que existem e são finitas $F'_+(a)$ e $F'_-(b)$. Convenções análogas para $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$.
- Toda a primitiva de uma função é uma função contínua.

Exer. 3.3

Indique uma primitiva das seguintes funções (no intervalo indicado)

(a) $f(x) = 2x$, em $\mathbb{R}$;
(b) $f(x) = e^x$, em $\mathbb{R}$;
(c) $f(x) = \cos x$, em $\mathbb{R}$;
(d) $f(x) = \frac{1}{x}$, em $\mathbb{R}^+$

Prop. 3.4

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função e $F\colon I \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f em I. Então, para cada $C \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + C$ é também uma primitiva de f em I.

Prop. 3.5

Se $F\colon I \to \mathbb{R}$ e $G\colon I \to \mathbb{R}$ são duas primitivas de $f\colon I \to \mathbb{R}$, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = C$, para todo o $x \in I$.

Def. 3.6

À família de todas as primitivas de uma função f chamamos integral indefinido de f. Denota-se esse conjunto de funções por

$$\int f(x)\,dx.$$

A f chamamos função integranda e a x variável de integração.

Obs. 3.7

1. Atendendo à proposição 3.5, tem-se:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,\ \ C \in \mathbb{R},$$

onde F é uma primitiva de f.

2. Se f for diferenciável, então

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Obs. 3.8

- $\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad$ (onde $x \in \mathbb{R}^+$ ou $x \in \mathbb{R}^-$)
- $\int e^x \, dx = e^x + C, \; C \in \mathbb{R}$ • $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \; C \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
- $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C, \; C \in \mathbb{R}$ • $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C, \; C \in \mathbb{R}$ • $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C, \; C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C, \; C \in \mathbb{R}$ • $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C, \; C \in \mathbb{R}$
- $\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C, \; C \in \mathbb{R}$
- $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C, \; C \in \mathbb{R}$

Prop. 3.9

Sejam f e g funções definidas em I e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos. Se f e g são primitiváveis em I, então $\alpha f + \beta g$ é primitivável em I e

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx\ .$$

Exer. 3.10

Calcule:

(a) $\displaystyle\int (2^x - 3 \operatorname{sen} x)\ dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2}\, dx$

Prop. 3.11

Sejam I e J intervalos de números reais, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função primitivável e $g : J \to \mathbb{R}$ uma função tal que a composta $f \circ g$ está definida.

Se g é diferenciável em J, então $(f \circ g)g'$ é primitivável e tem-se

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde F é uma primitiva de f.

Exemplo de aplicação

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \operatorname{sen}(x^2) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Obs. 3.12

Como consequência imediata da proposição anterior tem-se:

Seja u uma função de x.

- $\int u' u^p \, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C \,, \quad C \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\int \frac{u'}{u} \, dx = \ln |u| + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int u' e^u \, dx = e^u + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int u' a^u \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C \,, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
- $\int u' \operatorname{sen} u \, dx = -\cos u + C \,, \; C \in \mathbb{R}$
- $\int u' \cos u \, dx = \operatorname{sen} u + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int u' \sec^2 u \, dx = \operatorname{tg} u + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int u' \operatorname{cosec}^2 u \, dx = -\operatorname{cotg} u + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} u + C, \; C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{u'}{1+u^2} \, dx = \operatorname{arctg} u + C, \; C \in \mathbb{R}$
- $\int u' \sec u \operatorname{tg} u \, dx = \sec u + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \, dx = -\operatorname{cosec} u + C \,, \quad C \in \mathbb{R}.$

Exer. 3.13

Calcule os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^5}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int x7^{x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^5 x\,dx$

(f) $\displaystyle\int e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+9}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+9)^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{5}{x\ln^3 x}\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

Exer. 3.14

1. Determine a primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$ que se anula no ponto $x = 2$.

2. Determine a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f'(x) = \frac{2e^x}{3 + e^x} \qquad \text{e} \qquad f(0) = \ln 4.$$

3. Sabendo que a função f satisfaz a igualdade

$$\int f(x)\,dx = \operatorname{sen} x - x \cos x - \frac{1}{2}x^2 + c,\ \ c \in \mathbb{R}, \text{ determinar } f\left(\tfrac{\pi}{4}\right).$$

4. Usando dois processos distintos mostre que:

$$\int sec(x)\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta a derivada do produto, $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ obtemos por primitivação $\int uv\,dx = u'v + \int uv'dx$, que dá origem à chamada (técnica da) **primitivação por partes** usualmente enunciada do modo seguinte:

Prop. 3.15

Sejam u e v funções de x diferenciáveis em I, então

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'dx. \qquad \textbf{(Primitivação por partes)}$$

Exemplos

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{u'}\underbrace{\ln x}_{v}\,dx &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}; \\
\int \underbrace{1}_{u'}\underbrace{\ln x}_{v}\,dx &= x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx \\
&= x\ln x - x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Obs. 3.16

- Esta fórmula é útil quando a função integranda se pode escrever como o produto de duas funções e é conhecida uma primitiva de pelo menos uma delas.
- Sabendo primitivar apenas uma das funções, escolhe-se essa para primitivar e deriva-se a outra função.
- Quando conhecemos uma primitiva de cada uma das funções, devemos escolher para derivar a função que mais se simplifica por derivação. Por vezes essa escolha é indiferente.
- Por vezes é necessário efetuar várias aplicações sucessivas da fórmula de integração por partes.
- Por vezes obtém-se novamente o integral que se pretende determinar. Nesses casos, interpreta-se a igualdade obtida como uma equação em que a incógnita é o integral que se pretende determinar.

Exer. 3.17

Utilize a técnica de integração por partes para calcular os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int x \cos x \, dx$

(b) $\displaystyle\int e^{-3x}(2x+3) \, dx$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, dx$

(d) $\displaystyle\int x^3 \ln x \, dx$

(e) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} \, dx$

(f) $\displaystyle\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$

(g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx$

(h) $\displaystyle\int \ln^2 x \, dx$

Def. 3.18

Uma **função cuja expressão analítica admite a forma** $\frac{N(x)}{D(x)}$, **onde N e D são polinómios** em x com coeficientes reais e D é não nulo, **diz-se** uma **função racional**.

Caso $\text{grau}(N) < \text{grau}(D)$ dizemos que $\frac{N(x)}{D(x)}$ é uma fração própria.

Prop. 3.19

Se $\text{grau}(N) \geq \text{grau}(D)$, então existem polinómios Q e R tais que:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

com $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$. A Q e R chamamos quociente e resto da divisão de N por D, respetivamente.

Exemplo

Sendo $N(x) = 4x^3 + 3x$ e $D(x) = 2x^2 + 1$ tem-se, $\frac{N(x)}{D(x)} = 2x + \frac{x}{2x^2+1}$.
Neste caso, os polinómios quociente e resto são, respetivamente, $Q(x) = 2x$ e $R(x) = x$.

Obs. 3.20

Caso grau$(N) \geq$ grau(D), $$\frac{N(x)}{D(x)} = \underbrace{Q(x)}_{\textbf{polinómio}} + \underbrace{\frac{R(x)}{D(x)}}_{\textbf{fração própria}}$$

Como, $$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx,$$

e a primitivação de funções polinomiais é imediata, a primitivação de funções racionais reduz-se à primitivação de frações próprias, que por sua vez se pode reduzir à primitivação de frações simples.

Def. 3.21

Chamamos fração simples a toda a fração do tipo

$$\frac{A}{(x-\alpha)^p} \qquad \text{ou} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^q},$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B, C \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Exemplos de frações simples

$$\frac{2}{x-1}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{x-2}{x^2+x+1}, \quad \frac{1}{(x^2+x+2)^3}$$

Prop. 3.22

Toda a fração própria pode ser decomposta numa soma de frações simples.

Obs. 3.23

A primitiva de uma função racional $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ pode sempre escrever-se como somas, produtos, quocientes e composições de funções racionais, logaritmos e arco-tangentes.

Obs. 3.24

Fração a decompor: $\dfrac{R(x)}{D(x)}$, com $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$

Procedimento

1. Decompor $D(x)$ em fatores irredutíveis:

$$D(x) = a(x-\alpha_1)^{p_1} \ldots (x-\alpha_n)^{p_n} (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{q_1} \ldots (x^2+\beta_m x+\gamma_m)^{q_m}$$

onde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_i, q_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, com $\beta_j - 4\gamma_j < 0$, para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.

2. Associar a cada factor de $D(x)$ uma determinada fração simple ou soma de frações simples de acordo com o seguinte:

(i) Ao fator de $D(x)$ do tipo $(x-\alpha)^r$ ($r \in \mathbb{N}$) corresponde

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r}$$

onde $A_1, \ldots, A_r$ são constantes reais a determinar.

Procedimento (cont.)

(ii) Ao fator de $D(x)$ do tipo

$$(x^2+\beta x+\gamma)^s, \quad \text{com} \quad \beta^2-4\gamma<0 \quad \text{e} \quad s\in\mathbb{N}$$

corresponde,

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+\beta x+\gamma}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2}+\cdots+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}$$

onde B_i, C_i são constantes reais a determinar, $\quad i=1,\ldots,s$.

3. Escrever $\frac{R(x)}{D(x)}$ como soma dos elementos simples identificados no ponto anterior e determinar as constantes que neles ocorrem, usando o método dos coeficientes indeterminados.

Primitivação de Frações Simples

1. Fração do tipo: $\dfrac{A}{(x-\alpha)^r}$

   Se $r = 1$, $\displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A\ln|x-\alpha| + C, \ C \in \mathbb{R}$

   Se $r \neq 1$, $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}\,dx = \frac{A(x-\alpha)^{-r+1}}{-r+1} + C, \ C \in \mathbb{R}$

2. Fração do tipo: $\dfrac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}$

   Reduz-se à primitivação de frações do tipo:

   (i) $\dfrac{t}{(1+t^2)^s}$ ou (ii) $\dfrac{1}{(1+t^2)^s}$.

Primitivação das frações do tipo (i) e (ii) do slide anterior

(i) Fração do tipo: $\dfrac{t}{(1+t^2)^s}$

Se $s=1$, $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + C,\ C\in\mathbb{R}$

Se $s\neq 1$, $\displaystyle\int \frac{t}{(1+t^2)^s}\,dt = \frac{(1+t^2)^{-s+1}}{2(-s+1)} + C,\ C\in\mathbb{R}$

(ii) Fração do tipo: $\dfrac{1}{(1+t^2)^s}$

Se $s=1$, $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t + C,\ C\in\mathbb{R}$

Se $s\neq 1$, aplica-se o método de primitivação por partes recursivamente, partindo de $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Exemplos:

1. $\int \frac{x-5}{x^2+x-2}\, dx$

Passo 1: Fatorizar o denominador.
Como as raízes de x^2+x-2 são 1 e -2, obtemos

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2);$$

Passo 2: Determinar A e B de modo a que:

$$\frac{x-5}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2},$$

isto é tais que: $x-5=A(x+2)+B(x-1)$,

pelo que, $A+B=1$ e $2A-B=5$, ou seja $A=2$, e $B=-1$, i.e.

$$\frac{x-5}{x^2+x-2}=\frac{2}{x-1}+\frac{-1}{x+2},$$

Passo 3: Calcular o integral indefinido à custa das frações simples.

$$\int \frac{x-5}{x^2+x-2}\, dx=\int \frac{2}{x-1}\, dx+\int \frac{-1}{x+2}\, dx=2\ln|x-1|-ln|x+2|+C,\, C\in\mathbb{R}$$

Obs. 3.25

1. **Potências ímpares de $\operatorname{sen} x$ ou $\cos x$**
   Destaca-se uma unidade à potência ímpar e o fator resultante passa-se para a co-função usando $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

   Exercício: Calcule $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$

2. **Potências pares de $\operatorname{sen} x$ ou $\cos x$**
   Passam-se para o arco duplo através das fórmulas

   $$\cos^2 x = \tfrac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1-\cos(2x)}{2}.$$

   Exercício: Calcule $\displaystyle\int \cos^2 x \, dx$

3. **Produtos onde existem fatores tipo $\operatorname{sen}(mx)$ ou $\cos(nx)$**
   Aplicam-se as fórmulas,
   - $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$;
   - $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big)$;
   - $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\big)$.

   Exercício: Calcule $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x) \operatorname{sen}(-3x) \, dx$.

Obs. 3.25 (cont.)

4 **Potências pares e ímpares de $\operatorname{tg} x$ ou $\operatorname{cotg} x$**

Destaca-se $\operatorname{tg}^2 x$ ou $\operatorname{cotg}^2 x$ e aplicam-se as fórmulas

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

Exercício: Calcule $\displaystyle\int \operatorname{tg}^6 x\,dx$.

5 **Potências pares de $\sec x$ ou $\operatorname{cosec} x$**

Destaca-se $\sec^2 x$ ou $\operatorname{cosec}^2 x$ e ao fator resultante aplicam-se as fórmulas

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x.$$

Exercício: Calcule $\displaystyle\int \sec^6 x\,dx$.

6 **Potências ímpares de $\sec x$ ou $\operatorname{cosec} x$**

Destaca-se $\sec^2 x$ ou $\operatorname{cosec}^2 x$ e primitiva-se por partes escolhendo esse fator para primitivar.

Exercício: Calcule $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx$.

Exer. 3.26

Calcule os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x) \cos(4x) \, dx$

Primitivação por Substituição-Mudança de variável 78

Prop. 3.27

Sejam I e J intervalos de $\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rl} f : I \longrightarrow \mathbb{R} & \\ x \longmapsto f(x) & \end{array}$$

uma função primitivável e

$$\begin{array}{rl} \varphi : J \longrightarrow \mathbb{R} & \\ t \longmapsto \varphi(t) = x & \end{array}$$

uma função diferenciável e invertível tal que $\varphi(J) \subseteq I$.

Então a função $(f \circ \varphi)\varphi'$ é primitivável e, sendo H uma primitiva de $(f \circ \varphi)\varphi'$, tem-se que $H \circ \varphi^{-1}$ é uma primitiva de f. Assim, usando a mudança de variável $\varphi(t) = x$, temos

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}_{\text{mudança de variável}} = H(t) + C = \underbrace{H(\varphi^{-1}(x)) + C}_{\text{regresso à variável inicial}}, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplos

Calcule o integral indefinido $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\, dx\ x \in \mathbb{R}_0^+$, utilizando a substituição de variável $\sqrt{2x} = t$.

Dado que $\sqrt{2x} = t$, tem-se $x = \frac{t^2}{2}$, $t \geq 0$. A função $\varphi(t) = \frac{t^2}{2}$ é diferenciável e invertível em $\mathbb{R}_0^+$; $\varphi(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+$; e $\varphi'(t) = t$. Donde,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\, dx &= \int \frac{t}{1+t}\, dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\, dt \\ &= t - \ln|1+t| + C\ , \\ &= \sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Calcule o integral indefinido $\int \frac{\ln(x)}{x(ln^2 x+1)}\, dx$, $x \in \mathbb{R}^+$, utilizando a substituição de variável $x = e^t$.

Ora $x = e^t$ se e somente se $t = \ln(x)$. A função $\varphi(t) = e^t$ é diferenciável e invertível em $\mathbb{R}^+$ e $\varphi'(t) = e^t$. Donde,

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x)}{x(ln^2 x+1)}\, dx &= \int \frac{t}{e^t(t^2+1)} e^t\, dt = \int \frac{t}{t^2+1}\, dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(\ln^2(x)+1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Tabela

	Função com radical	Substituição
1.	$\sqrt{a^2+x^2}$, $a>0$	$x = a\,\mathrm{tg}\, t$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
2.	$\sqrt{a^2-x^2}$, $a>0$	$x = a\,\mathrm{sen}\, t$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
3.	$\sqrt{x^2-a^2}$, $a>0$	$x = a \sec t$, com $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$
4.	$\sqrt{a^2+b^2x^2}$, $a, b>0$	reduz-se ao caso 1.
5.	$\sqrt{a^2-b^2x^2}$, $a, b>0$	reduz-se ao caso 2.
6.	$\sqrt{-a^2+b^2x^2}$, $a, b>0$	reduz-se ao caso 3.
7.	$\sqrt{a^2x^2+bx+c}$, $a \neq 0$ e $b, c \in \mathbb{R}$	reduz-se a um dos anteriores.

Exercício:

Exer. 3.28

Calcule, usando uma mudança de variável adequada os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int x(2x+5)^{10}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$

Integrais de Riemann ou Integrais definidos

Corpo Docente:

Ana Breda (Responsável)
Paolo Vettori
Sandrina Santos

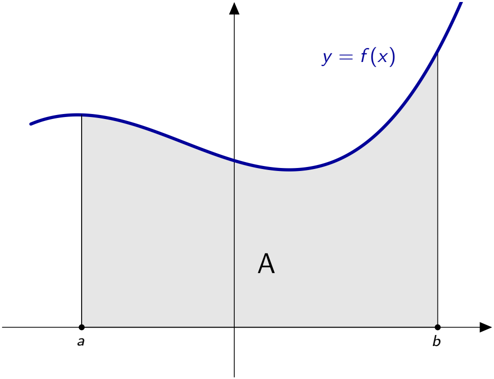
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

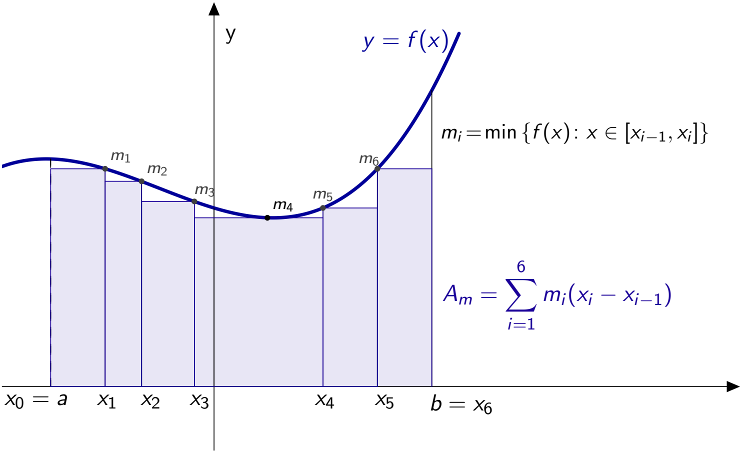
Setembro de 2016

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no texto de **Virgínia Santos** indicado na bibliografia

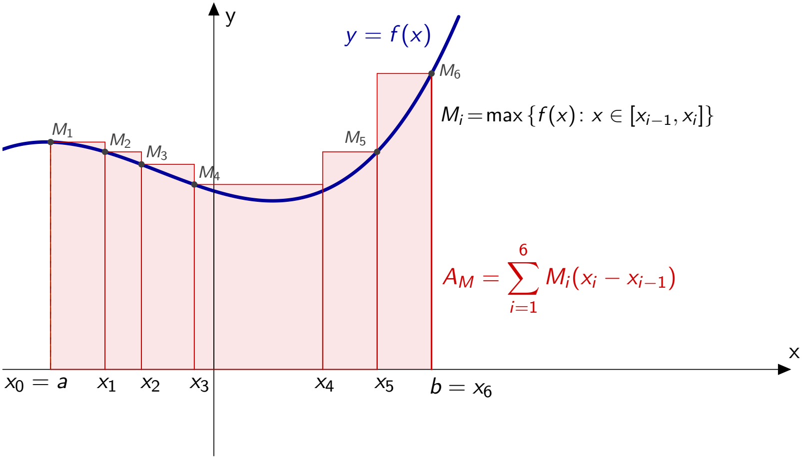
Questão:

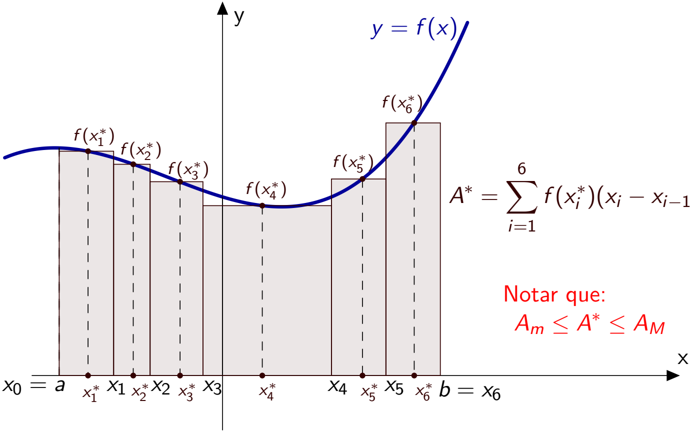
Como calcular a área delimitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$?




y
$y = f(x)$
$m_i = \min\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
m_1
m_2
m_3
m_4
m_5
m_6
$A_m = \sum_{i=1}^{6} m_i(x_i - x_{i-1})$
$x_0 = a$
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
$b = x_6$

Área calculada por excesso





$$A^* = \sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Notar que:

$$A_m \leq A^* \leq A_M$$

Def. 4.1

- Chamamos partição de $[a, b]$, a todo o subconjunto finito de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tal que $a \equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_n \equiv b$.
- Sendo $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$, chamamos diâmetro de $\mathcal{P}$, e denotamos por $\Delta\mathcal{P}$, à maior das amplitudes dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é,
$$\Delta\mathcal{P} = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$
- Chamamos seleção de $\mathcal{P}$ a todo o conjunto $\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$ tal que $x_1^* \in [x_0, x_1]$, $x_2^* \in [x_1, x_2]$, ..., $x_n^* \in [x_{n-1}, x_n]$.

Def. 4.2

Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a,b]$ e $\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$ uma sua seleção. À soma,

$$S_f(\mathcal{P},\mathcal{C}) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \ .$$

Chamamos soma de Riemann de f associada à partição $\mathcal{P}$ e seleção $\mathcal{C}$.

Def. 4.3

Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $I \in \mathbb{R}$. Dizemos que I é o **integral de Riemann** (ou **o integral definido**) de f em $[a,b]$ (ou de a para b) se, para todo o $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para toda partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$, com $\Delta\mathcal{P} < \delta$, e, para toda a seleção $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$,

$$|S_f(\mathcal{P},\mathcal{C}) - I| < \epsilon.$$

Caso exista I, nas condições anteriores, diz-se que f é integrável em $[a,b]$ e escreve-se,

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Obs. 4.4

f é integrável em $[a, b]$ se e só se para toda a sucessão de partições $\left(\mathcal{P}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ do intervalo $[a, b]$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} |\mathcal{P}_n| = 0, \text{ se tem,}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_f(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) = I,$$

para toda a sucessão $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de seleções $\mathcal{P}_n$ - compatíveis.

Exer. 4.5

Considere a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = k$, onde k designa uma constante real arbitrária. Determine, caso exista, o integral definido de f em $[a, b]$.

limite superior de integração

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

variável de integração

função integranda

limite inferior de integração

Obs. 4.6

- A variável de integração é uma variável muda, i.e., podemos escrever, por exemplo $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$.
- Na definição de integral de Riemann considerou-se $a < b$. Vamos agora dar significado ao integral de Riemann quando $a = b$ e quando $a > b$. Sendo f integrável, escrevemos por convenção, que

  $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, e,

  $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$; se $a > b$.

Prop. 4.7

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Se f é integrável em $[a, b]$ então f é limitada em $[a, b]$.

Obs. 4.8

- A proposição anterior permite concluir que

  f não limitada em $[a, b] \Rightarrow f$ não integrável em $[a, b]$.

- **O recíproco** da proposição anterior **não é válido**. Existem funções limitadas num intervalo que não são integráveis nesse intervalo.

Exer. 4.9

Mostre que a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

não é integrável em qualquer intervalo $[a, b]$, onde $a < 0 < b$.

Prop. 4.10

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função.

1. Se f for contínua em $[a, b]$ então f é integrável em $[a, b]$.
2. Se f for limitada em $[a, b]$ e descontínua num número finito de pontos então f é integrável em $[a, b]$.
3. Se f for monótona em $[a, b]$ então f é integrável em $[a, b]$.

Prop. 4.11

Sejam f e g funções definidas em $[a, b]$. Se f é integrável em $[a, b]$ e g difere de f apenas num número finito de pontos (isto é, $f(x) = g(x)$, para todo o $x \in [a, b]$, exceto para um número finito de valores de x), então

$$g \text{ é integrável em } [a, b] \text{ e } \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\ .$$

Exer. 4.12

Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis no intervalo considerado:

1. $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$, em $[0, 4]$

2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 2 & \text{se} \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$, em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se} \quad x \in [-2, 0[\\ 2 & \text{se} \quad x = 0 \\ x & \text{se} \quad x \in]0, 1] \end{cases}$, em $[-2, 1]$

4. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se} \quad x \in [3, 7] \ \text{ e } \ x \notin \mathbb{N} \\ 1 & \text{se} \quad x \in [3, 7] \cap \mathbb{N} \end{cases}$, em $[3, 7]$

Prop. 4.13

Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

2. αf é integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx;$

3. $f \cdot g$ é integrável em $[a,b]$;

4. f é integrável em qualquer sub-intervalo $[c,d]$ de $[a,b]$;

5. Se $c \in]a,b[$, então f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$ e
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,;$$

Prop. 4.13 (cont.)

6. Se $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$;

7. Se $f(x) \leq g(x)$, para todo o $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx\,;$$

8. Se $m \leq f(x) \leq M$, para todo o $x \in [a, b]$, onde $m, M \in \mathbb{R}$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)\,;$$

9. $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$

Exer. 4.14

1. Mostre que $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx \geq 0$.

2. Sabendo que
$$\int_1^3 f(x)\,dx = 5 \quad \text{e} \quad \int_7^1 f(x)\,dx = -11,$$
calcule $\int_3^7 f(x)\,dx$.

3. Mostre que se f é uma função contínua e estritamente crescente no intervalo $[1, 3]$, então
$$f(1) < \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,dx < f(3).$$

Teo. 4.15

Seja f uma função integrável num intervalo fechado I de $\mathbb{R}$. Então, para cada $a \in I$, a função F de I em $\mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \text{ é}$$

(i) contínua em I;

(ii) e se f for contínua em $x \in \operatorname{int}(I)$, F é diferenciável em x e $F'(x) = f(x)$.

Por outras palavras, F é uma primitiva de f.

Cor. 4.16

Seja f uma função contínua em I, $a \in I$ e $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
Então F é diferenciável em I e tem-se que

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in I,$$

isto é,

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x), \ \forall x \in I.$$

Exer. 4.17

1. Calcule $F'(x)$ sendo F a f.r.v.r. dada por

(a) $F(x)=\displaystyle\int_1^x\left(\operatorname{sen} t^2+e^{-t^2}\right)dt$ (b) $F(x)=\displaystyle\int_x^2 \cos t^4\, dt$

2. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ e seja

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt, \quad \text{para } x > 1.$$

Justifique que F é diferenciável em $x = 2$ e calcule $F'(2)$.

3. Mostre que se f é uma função contínua e não negativa em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, então $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Sugestão: Considere a função $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ e use o Teo. 4.15.

Cor. 4.18

Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$.
Então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a)\,.$$

Exer. 4.19

Seja $f(x) = x^2$ e $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$.

1. Justifique que a função F é contínua em $[1, 4]$.
2. Calcule $F(1)$ e $F'(2)$.
3. Mostre que existe um $c \in]1, 4[$ tal que $F(4) = 3c^2$.

Como, referido anteriormente,

Obs. 4.20

Se f é contínua em $[a,b]$, então $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $x\in[a,b]$, é uma primitiva de f em $[a,b]$.

Cor. 4.21

Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua em $]a,b[$ e $g_1:I\to\mathbb{R}$ e $g_2:I\to\mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em I tais que $g_1(I)\subseteq]a,b[$ e $g_2(I)\subseteq]a,b[$.

Então a função H definida em I por $H(x)=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt$, é diferenciável em I e, $\forall x\in I$, $H'(x)=f\left(g_2(x)\right)g_2'(x)-f\left(g_1(x)\right)g_1'(x)$.

Obs. 4.22

Sendo $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $x\in[a,b]$ e $G(x)=\int_a^{g(x)} f(t)dt$, $x\in I$, com $g(I)\subset]a,b[$, então $G=F\circ g$ e portanto $G'(x)=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$

Exer. 4.23

1 Calcule $F'(x)$ sendo F a f.r.v.r. dada por

(a) $F(x)=\displaystyle\int_{x^3}^{\cos x} \ln(t^2+1)\,dt$ (b) $F(x)=x^3\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,dt$

2 Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $F'(1)=0$, sendo F a função definida em $\mathbb{R}^+$ por

$$F(x)=\int_x^{k\ln x} e^{-t^2}\,dt.$$

3 Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por

$$F(x)=\int_0^{x^2} (4+\operatorname{sen} t)\,dt.$$

(a) Calcule $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) Estude a função F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

Exer. 4.24

1 Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} t\, e^{\operatorname{sen} t}\, dt$.

(a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $F'(x)$.

(b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{\operatorname{sen} x}$

2 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um função contínua. Considere a função φ dada por

$$\varphi(x) = \int_{e^x}^{1+x^2} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Justifique que φ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $\varphi'(x)$.

(b) Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = -f(1)$.

Prop. 4.25

Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e se $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Obs. 4.26

Notação: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b$

Exemplos de aplicação:

1. $\displaystyle\int_1^2 (x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$

2. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{y\ln y}\,dy = \Big[\ln|\ln y|\Big]_e^{e^2} = \ln|\ln(e^2)| - \ln|\ln(e)| = \ln(2)$

Exer. 4.27

1. Calcule

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^0 \operatorname{sen}(3x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_3^{11} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$

2. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ onde $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & \text{se} \quad x\in[-1,0[\\ 7 & \text{se} \quad x=0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{se} \quad x\in]0,1] \end{cases}$

Prop. 4.28

$$\int_a^b u'v\,dx = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b uv'\,dx.$$

Exemplo de aplicação:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\cos x\,dx &= \Big[\operatorname{sen} x\,.\,x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \\
&= 0 - \Big[-\cos x\Big]_0^\pi \\
&= \cos\pi - \cos 0 = 2
\end{aligned}$$

Exer. 4.29

Calcule: (a) $\displaystyle\int_0^1 (x+2)e^x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$

Prop. 4.30

Sejam f uma função contínua em I e

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & J & \longrightarrow & I \\ & t & \mapsto & x=\varphi(t) \end{array}$$

diferenciável em J e tal que φ' é contínua em J.
Sejam $a, b \in I$ e $c, d \in J$ tais que $\varphi(c)=a$ e $\varphi(d)=b$. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Obs. 4.31

I e J denotam intervalos não degenerados de $\mathbb{R}$.

Exer. 4.32

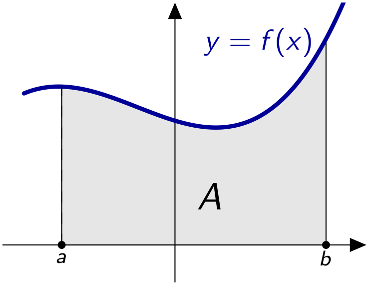
Calcule: (a) $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x+4}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Prop. 4.33

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, então a área da região plana delimitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ilustração gráfica



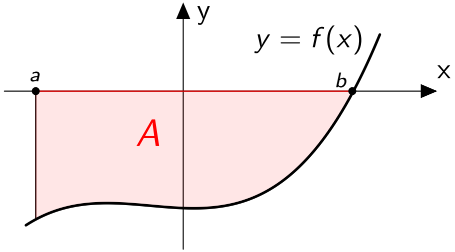
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Prop. 4.34

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$, então a área da região plana delimitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$-\int_a^b f(x)\, dx.$$

Ilustração gráfica



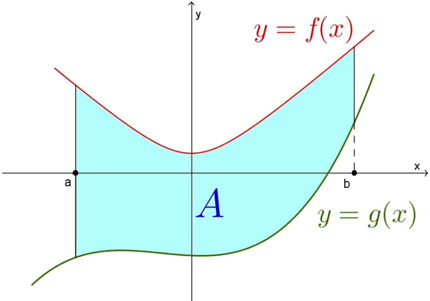
$$A = -\int_a^b f(x)\, dx$$

Prop. 4.35

Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$ tais que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, então a área da região plana delimitada pelos gráficos de f e de g e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Ilustração gráfica



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Exer. 4.36

1. Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$ e pelas retas $x = 2$ e $y = 0$.

2. Calcule a área da região do plano situada entre $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função h definida por
$$h(x) = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

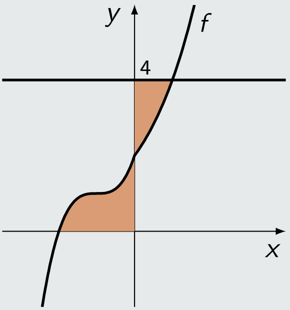
3. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x - 3)^2, y \geq x - 1, y \leq 4\}$.
   (a) Represente geometricamente a região A.

   (b) Calcule o valor da área da região A.

Exer. 4.37

Calcule a área da seguinte região sombreada, onde

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 + 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}.$$



Integrais impróprios

Corpo Docente:

Ana Breda (Responsável)
Paolo Vettori
Sandrina Santos

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Setembro de 2016

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no texto de **Virgínia Santos** indicado na bibliografia

Obs. 5.1

O integral definido (integral de Riemann) exige que a função integranda, f, esteja definida num intervalo fechado e limitado, I, e que f seja limitada. Podemos estender esta noção de forma a englobar uma destas restrições ou mesmo ambas, passando ao estudo do que chamamos Integrais Impróprios.

Os **Integrais Impróprios** podem ser de três espécies:

1.ª Espécie: O intervalo I não é limitado mas f é limitada em qualquer subintervalo fechado de I.

2.ª Espécie: a função f não é limitada ou não está definida em alguns pontos de I, sendo I limitado.

3.ª Espécie: O intervalo I não é limitado e f não é limitada ou não está definida em alguns pontos de I

Vamos limitar o nosso estudo aos integrais impróprios de 1.ª Espécie.

1ª Espécie

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx; \qquad \int_{-\infty}^{0} x^3\,dx; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx.$$

2ª Espécie

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - 1}\,dx; \qquad \int_0^3 \frac{1}{x(x-3)}\,dx; \qquad \int_{-2}^{3} x^2\,dx.$$

3ª Espécie

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x-3)}\,dx; \qquad \int_{-\infty}^{1} \ln(1-x)\,dx.$$

Vamos limitar o nosso estudo aos integrais impróprios de 1.ª Espécie

.

Def. 5.2

Integral impróprio de *1.ª* espécie no limite superior de integração

Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, $\forall t \geq a$.
Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

então o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diz-se convergente e escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se divergente.

Exemplo de aplicação:

Estudar a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

Como

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\, dx &= \lim_{t\to+\infty} [\operatorname{arctg}(x)]_0^t \\ &= \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t \\ &= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ é convergente e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Exer. 5.3

1. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a) $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \cos(x)dx$ (b) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2}dx$ (c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}dx$

2. Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ é:

divergente se $\alpha \leq 1$;

convergente se $\alpha > 1$ e, neste caso, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}$.

3. Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\beta x}\,dx$ é:

divergente se $\beta \geq 0$;

convergente se $\beta < 0$ e, neste caso, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\beta x}\,dx = -\frac{1}{\beta}$.

Def. 5.4

Integral impróprio de *1.ª* espécie no limite inferior de integração

Seja $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, a]$, $\forall t \leq a$. Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\,dx$$

então o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ diz-se convergente e escreve-se

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\,dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se divergente.

Exemplo de aplicação:

Como

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty}\int_t^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}[\operatorname{arctg}(x)]_t^1\\ &= \lim_{t\to-\infty}(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg} t)\\ &= \frac{3\pi}{4},\end{aligned}$$

o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente e

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{3\pi}{4}\,.$$

Exer. 5.5

1. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{4-x}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{4}{1+(x+1)^2}\,dx$

2. Estude a natureza do seguinte integral impróprio em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\int_{-\infty}^{0} a^x\,dx$$

Prop. 5.6

Sejam $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a, t]$, $\forall t \geq a$. Então verificam-se as seguintes condições:

1. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ são convergentes, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ é convergente, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e
$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$
2. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\alpha f(x))\,dx$ é divergente, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exer. 5.7

Mostre que nas condições da Proposição anterior se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é diverge então $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))\,dx$ é divergente.

Obs. 5.8

Resultados análogos válidos para integrais impróprios de 1.ª espécie no limite inferior de integração.

Prop. 5.9

Sejam $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,t]$, $\forall t \geq a$, e $b > a$. Então os integrais impróprios

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

têm a mesma natureza (*i.e.*, ou são ambos convergentes ou ambos divergentes). Em caso de convergência, tem-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{b} f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Obs. 5.10

Resultado análogo, com as devidas adaptações, é válido para integrais impróprios de 1.ª espécie no limite inferior de integração.

Exemplos de aplicação:

1. Pelo Exercício 7.3.2 tem-se que
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \text{ converge e que } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}.$$
Portanto
$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

2. Como, atendendo ao Exercício 7.3.2, o integral impróprio
$\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2\,dx$ é divergente, então o integral impróprio
$\displaystyle\int_3^{+\infty} x^2\,dx$ também é divergente.

Def. 5.11

Integral impróprio de 1.º espécie em ambos os limites de integração

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[\alpha, \beta]$ para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha < \beta$.

1. Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, os integrais impróprios

   $$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \ \text{ são ambos convergentes}$$

   dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente e escrevemos

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Def. 5.12 (cont.)

2. Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, pelo menos um dos integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

é divergente dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente.

Exer. 5.13

Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2^x\,dx$

Prop. 5.14

Critério de Comparação

Sejam f e g duas funções definidas em $[a, +\infty[$, integráveis em $[a, t]$, $\forall t \geq a$, tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \ ,$$

para todo o $x \in [a, +\infty[$. Então:

(i) se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente.

(ii) se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é divergente.

Obs. 5.15

Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o mesmo critério para integrais impróprios de 1.ª espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exemplo de aplicação:

Usando o Critério de Comparação estudar a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx\,.$$

Notar que, para todo o $x \in [1, +\infty[$ temos

$$0 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}\,. \text{ (justifique!)} \tag{1}$$

Uma vez que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente e que a desigualdade (1) se verifica, pelo Critério de Comparação, o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente.

Prop. 5.16

Sejam f e g duas funções definidas em $[a, +\infty[$ e integráveis em $[a, t]$, $\forall t \geq a$, tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$, $\forall x \in [a, +\infty[$. Seja

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \,.$$

Então:

(i) Se $L \in \mathbb{R}^+$, então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ têm a mesma natureza.

(ii) Se $L = 0$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente.

(iii) Se $L = +\infty$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente.

Exemplo de aplicação:

Usando o Critério do Limite estudar a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx \, .$$

Notar que, $\forall x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{sen} \frac{1}{x^2} \geq 0$ e $\frac{1}{x^2} > 0$. Além disso

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \, .$$

Uma vez que $L \in \mathbb{R}^+$ e que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente, pelo Critério do Limite, o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente.

Obs. 5.17

Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o Critério do Limite para integrais impróprios de 1.ª espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exemplo de aplicação:

Estudo da natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{(x-1)^2}\,dx$.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $\frac{e^x}{(x-1)^2} > 0$ e $\frac{1}{(x-1)^2} > 0$.

Uma vez que

$$L = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x}{(x-1)^2}}{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

e que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ é convergente (verifique!), concluímos, pelo Critério do Limite, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{(x-1)^2}\,dx$ é convergente.

Exer. 5.18

Estude, utilizando o critério de comparação ou o critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{5x^2 - 3}{x^8 + x - 1}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x^2}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{4 + \sqrt{x}}\, dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{x^7 + 2x + 1}\, dx$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3 + 3x}{2 + x^2}\, dx$

Def. 5.19

Seja $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[a,t]$, para todo o $t \in [a,+\infty[$.
Dizemos que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

é absolutamente convergente, se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

é convergente.

Prop. 5.20

Seja $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[a,t]$, para todo o $t \in [a,+\infty[$.
Se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

é absolutamente convergente, então também é convergente.

Obs. 5.21

Com ligeiras adaptações, pode definir-se convergência absoluta e enunciar-se a mesma proposição para integrais impróprios de 1.ª espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exer. 5.22

Verifique se os seguintes integrais impróprios são absolutamente convergentes:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+2x^4}\, dx$, para todo o $n \in \mathbb{N}$